

10. Ciągi

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich. Ciąg $a : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy liczbowym; oznaczamy go (a_n) , a kolejne wartości ciągu nazywamy jego wyrazami i oznaczamy $a_1, a_2, a_3, \dots$

Ciągiem skończonym k -wyrazowym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony zbiór liczb $\{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Ciągi monotoniczne

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy:

- **rosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$: $a_{n+1} > a_n$,
- **malejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$: $a_{n+1} < a_n$,
- **nierosnącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$: $a_{n+1} \leq a_n$,
- **niemalejącym**, jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$: $a_{n+1} \geq a_n$,
- **stałym**, jeżeli wszystkie wyrazy ciągu są równe.

Ciąg arytmetyczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r , że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n.$$

Ciąg geometryczny

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ciągami geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q , że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dla $q = 1$ jest $S_n = n \cdot a_1$.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

- Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n) .
a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ b) $a_n = n^n$ c) $a_n = \log_2 4^n$
- Ile wyrazów dodatnich ma ciąg (a_n) ? Podaj największy z nich.
a) $a_n = 13 - 3n$ b) $a_n = \frac{16}{n} - 2$ c) $a_n = \frac{1}{2}(2+n)(6-n)$
- Które wyrazy ciągu (a_n) są równe zeru?
a) $a_n = n^2 + n - 6$ b) $a_n = \frac{12n-3}{n+2}$ c) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$
- Które wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od liczby m ?
a) $a_n = \frac{n}{4} + 1, m = 10$ b) $a_n = n^2 - 2n, m = 8$ c) $a_n = 2 - \frac{2}{n}, m = \frac{5}{3}$
- Oblicz trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego.
a) 0, 4, 8, 12, ... b) $1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}, \dots$ c) $4\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 3, \dots$
- Czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.
a) $a_n = 2 - 2n$ b) $a_n = 2 + n^2$ c) $a_n = \frac{2n+n^2}{n}$
- Wykaż, że ciąg $a_n = \log_2(2 \cdot 3^n)$ jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz jego pierwszy wyraz i różnicę.
- Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli:
a) $a_2 = 8, a_6 = 0,$ b) $a_4 = -5, a_7 = -4,$ c) $a_2 = 1, a_4 = 3 - 2\sqrt{3}.$
- Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu, jeśli $a_{10} = 66$.
- Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli:
a) $a_1 + a_2 = 11$ i $a_3 + a_4 = 31,$ b) $a_1 + a_3 = -2$ i $a_2 \cdot a_4 = -5.$
- a) Liczby $x - 4, 5, x + 12$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x .
b) Liczby 6, $x, y, z, 9$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x, y i z .
- Długości trzech krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r = 3$. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 132. Oblicz jego objętość.
- Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

14. Oblicz.
a) $3 + 6 + 9 + \dots + 96$ b) $1 + 5 + 9 + \dots + 101$
15. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 16, a różnica $r = -\frac{1}{2}$. Oblicz $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}$.
16. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, a trzeci jest o 8 większy. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych.
17. Lewa strona równania jest sumą kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego. Wyznacz x .
a) $2 + 6 + 10 + \dots + x = 648$ b) $(2 - 3x) + (5 - 3x) + \dots + (35 - 3x) = 66$
18. Dane są trzy początkowe wyrazy ciągu geometrycznego. Dopisz trzy kolejne wyrazy tego ciągu i wyznacz jego wzór ogólny.
a) 3, -6, 12b) 27, 18, 12c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}, 1, \sqrt{3} + \sqrt{2}$
19. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) .
a) $a_1 = 3, a_2 = 6$ b) $a_3 = 9, a_4 = 6$ c) $a_1 = -3, a_4 = 24$
20. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) . Oblicz a_1, q oraz a_4 .
a) $a_n = -2 \cdot 3^n$ b) $a_n = 2^{-n}$ c) $a_n = 3 \cdot (-2)^n$ d) $a_n = -2^n$
21. Czy ciąg (a_n) jest geometryczny? Odpowiedź uzasadnij.
a) $a_n = 3n^2$ b) $a_n = 3^{n+2}$ c) $a_n = 3 + 2^n$ d) $a_n = 3^n \cdot 2^n$
22. Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) , w którym:
a) $a_4 = 5$ i $25a_3 = 16a_5$,b) $a_2 = \sqrt{2} - 1, a_4 = \sqrt{2} + 1$.
23. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli:
a) $a_1 = 4, 2a_5 = 3a_4, n = 5$,b) $a_2 = 2, a_7 = -64, n = 8$.
24. Oblicz długość linii składającej się z dziesięciu połączonych półokręgów o średnicach odpowiednio: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}, \dots$
25. Kredyt w wysokości 10 000 zł wraz z odsetkami należy spłacić jednorazowo po 5 latach. Co roku bank dolicza odsetki w wysokości 8%. Jaką kwotę trzeba będzie spłacić?
26. Na lokacie złożono 25 000 zł przy rocznej stopie procentowej 4%. Oblicz wielkość kapitału na lokacie po upływie roku, jeżeli odsetki są kapitalizowane:
a) co pół roku,b) co kwartał,c) co miesiąc.

Zestaw B. Test jednokrotnego wyboru

1. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n \cdot (25 - 9n^2)$. Różnica $a_2 - a_1$ jest równa:
A. -37, B. -16, C. -5, D. 5.
2. Jedynym ujemnym wyrazem ciągu $a_n = n^2 - 6n + 8$ jest:
A. a_1 , B. a_2 , C. a_3 , D. a_4 .
3. Różnica ciągu arytmetycznego danego wzorem $a_n = \frac{3-6n}{2}$ jest równa:
A. -6, B. -3, C. 3, D. 6.
4. Dany jest ciąg arytmetyczny $\sqrt{3}, 3\sqrt{3} - 2, 5\sqrt{3} - 4, \dots$. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:
A. $9\sqrt{3} - 8$, B. $7\sqrt{3} - 6$, C. $6\sqrt{3} - 5$, D. $5\sqrt{3} - 5$.
5. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 24, a szósty wynosi 9. Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:
A. 144, B. 120, C. 112, D. 99.
6. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 6, a suma jego pięciu początkowych wyrazów wynosi 130. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:
A. 26, B. 30, C. 36, D. 46.
7. Który wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i różnicy $r = 6$ jest równy 122?
A. a_{21} B. a_{20} C. a_{19} D. a_{18}
8. Suma wszystkich liczb dwucyfrowych wynosi:
A. 4500, B. 4905, C. 4950, D. 5450.
9. Iloczyn trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 729. Drugim wyrazem tego ciągu jest liczba:
A. 6, B. 9, C. 12, D. 18.
10. Liczby $4x, -4, x$ są kolejno: pierwszym, drugim i trzecim wyrazem rosnącego ciągu geometrycznego. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:
A. -2, B. -1, C. 1, D. 4.
11. Liczby 8, $x, y, 27$ tworzą ciąg geometryczny. Iloczyn liczb x i y jest równy:
A. 144, B. 196, C. 216, D. 248.

Zestaw C. Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1. (2 pkt) – Informator CKE

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$, dla $n \geq 1$. Oblicz a_2 i a_5 .

Zadanie 2. (2 pkt)

Ile wyrazów dodatnich ma ciąg $a_n = 10 + 9n - n^2$, dla $n \geq 1$?

Zadanie 3. (2 pkt)

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 2. Wykres ciągu zawiera się w prostej prostopadłej do prostej $y = \frac{2}{3}x$. Wyznacz wyraz a_2 tego ciągu.

Zadanie 4. (2 pkt) – Informator CKE

Liczby $x - 2$, 3, $x + 6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x .

Zadanie 5. (2 pkt) – Matura próbna, listopad 2009

Wykaż, że dla każdego m ciąg $\frac{m+1}{4}$, $\frac{m+3}{6}$, $\frac{m+9}{12}$ jest arytmetyczny.

Zadanie 6. (2 pkt)

Wykres ciągu (a_n) jest zawarty w paraboli $y = (x + 2)(x - 3)$. Wykaż, że nie jest to ciąg arytmetyczny.

Zadanie 7. (2 pkt)

Oblicz różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym piąty wyraz jest o 2 mniejszy od drugiego wyrazu.

Zadanie 8. (2 pkt)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 105$. Oblicz a_7 .

Zadanie 9. (2 pkt)

Oblicz sumę $5 + 9 + 13 + \dots + 105$.

Zadanie 10. (2 pkt)

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeżeli $a_1 = 3$ oraz $a_3 = 5a_2$.

Zadanie 11. (2 pkt)

Uzasadnij, że ciąg $a_n = n \cdot 2^n$ nie jest geometryczny.

Zadanie 12. (2 pkt)

Liczby $\frac{27}{2}$, a , b , 4 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz a i b .

Zadanie 13. (2 pkt)

Wyznacz x , tak by liczby: 9, x , $x - 2$ tworzyły malejący ciąg geometryczny.

Zestaw D. Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 1. (5 pkt)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_5 = 2$ oraz $a_8 = 14$. Zapisz wzór ogólny ciągu (a_n) . Dla jakiej wartości n suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest najmniejsza?

Zadanie 2. (5 pkt) – Matura, maj 2008

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

a) Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 1,975.

b) Dla pewnej liczby x trzywyrazowy ciąg (a_2, a_7, x) jest arytmetyczny. Oblicz x .

Zadanie 3. (4 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny o polu 54. Długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 4. (5 pkt)

Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 120, a suma pierwszych pięciu wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 65. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu. Znajdź n takie, że liczby a_7 , a_{10} , a_n są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 5. (6 pkt) – Matura, maj 2009

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.

a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n) .

b) Sprawdź, czy ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest geometryczny.

c) Wyznacz takie n , aby suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) była najmniejsza.

Zadanie 6. (4 pkt)

Dane są liczby 3, a , b , 25. Trzy pierwsze tworzą rosnący ciąg arytmetyczny, trzy ostatnie – ciąg geometryczny. Oblicz a i b .

Zadanie 7. (5 pkt) – Informator CKE

Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$. Ciąg $(a, b + 3, c + 13)$ jest geometryczny. Oblicz a , b i c .

Zadanie 8. (3 pkt) – Matura próbna, styczeń 2009

Dziadek założył w banku trzyletnią lokatę o stałej rocznej stopie procentowej równej 5% (po uwzględnieniu podatków i prowizji). Odsetki są kapitalizowane po każdym roku trwania lokaty. Środki otrzymane w banku po zlikwidowaniu lokaty dziadek podzielił pomiędzy dziewięcioro wnucząt tak, aby każde z dzieci otrzymało 1029 zł. Oblicz początkową kwotę lokaty.